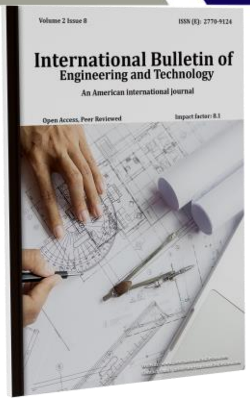

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Исломов Бобур Холбута ўғли
докторант
Мухиддинов Зайниддин Носирович
доцент
Жураева Нозима Адыловна
ассистент
Ташкентский Государственный Технический Университет имени И.Каримова
Тел.: +99899 334 67 49
https://doi.org/10.5281/zenodo.8013920

Анализ и синтез любой САУ можно провести только на основе ее математической модели, которая представляет систему с достаточной степенью точности как в статике, так и динамике. Наличие математической модели, вообще говоря, определяет наше знание про рассматриваемое явление. Математическая модель составляется в виде системы уравнений, обычно дифференциальных, связывающих входные и выходные величины исследуемой системы или управляемого объекта.

Существует два основных подхода к составлению математических моделей. Первый базируется на представлении описания системы исходя из физических законов, отображающих ее поведение. Такой подход позволяет получить модель, наиболее адекватную на возможно широком диапазоне модификации входящих в нее переменных. Второй подход базируется на исследовании явления как «черного ящика», когда на основе корреляционного анализа и теории планирования эксперимента строят модель, как правило, в заранее выбранной форме. Здесь нужна большая осторожность, чтобы при всегда ограниченном количестве статистических данных вывести общую закономерность. (В известной степени проиллюстрировать это положение можно высказыванием П.Л. Капицы в книге «Эксперимент, теория, практика»: «Существует три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика».) Однако этим подходом, не считаясь с его недостатками, но помня о них, пользуются в случаях, когда исследуют процессы или явления, которые не имеют еще достаточного физического объяснения.

Рис. 1. Исходная система

Если все уравнения математической модели линейные, то все основные характеристики исследуемой САУ могут быть получены в аналитической форме. Однако на практике математические модели многих систем и объектов нелинейные; как правило, они не имеют аналитических решений и могут быть исследованы специальными, например численными методами. Поэтому при составлении математической модели желательно получить уравнение системы в линейном виде, а если это не удается, их линеаризуют. В работе любой системы можно выделить два режима: переходный и установившийся. В установившемся режиме система находится в равновесии, т.е. все производные от установившихся координат равны 0. Основываясь на принципе работы САУ, который гарантирует малые отклонения сигналов от их установившихся значений, проводят линеаризацию уравнений движения, заменяя точные нелинейные уравнения приближенным линейным в окрестности установившегося режима работы. Таким образом, основной метод линеаризации базируется на представлении системы в малых отклонениях от их установившихся значений. Пусть существует система (рис. 1), движение которой описывается нелинейным уравнением:

$F(x_1, x_2, x_2', y, y', y'') = 0.$ (1)

где x_1, x_2 - входные величины, у - выходная величина, x_2', y', y'' -производные по времени от соответствующих входных и выходных величин. Линеаризованное уравнение движения исходной системы в окрестности установившегося режима работы получают в виде:

$$\delta F \approx \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 \delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)_0 \delta x_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0 \delta y'' = 0. \quad (2)$$

Полученное дифференциальное уравнение (2) так же, как и исходное (1), описывает движение исследуемой системы, однако оно является приближенным (так как были отброшенные члены высшего порядка малости) и записано не относительно самих переменных, а относительно их отклонений от значений, которые установились. Поскольку $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0$ -значения частных производных при всех переменных, соответствующих точке линеаризации (т.е. это коэффициенты), то уравнение (2) является линейным. Таким образом, получено линейное уравнение в отклонениях или вариациях переменных.

Объяснение метода линеаризации

Поскольку в установившемся режиме работы производные от установившихся координат равны 0, для описания работы системы в этом режиме исходное нелинейное уравнение (2.1) может быть записано в виде:

$F[((x_1)_0 + \delta x_1, (x_2)_0 + \delta x_2, \delta x_2', y_0 + \delta y, \delta y', \delta y''] = 0,$ (3)

где $(x_1)_0$, $(x_2)_0$, y_0 - установившиеся значения переменных; δ показывает вариации переменных от установившихся значений. Разложим функцию F (3) в ряд Тейлора по степеням малых отклонений в области установившегося режима работы, рассматривая все производные как независимые переменные:

$$F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 \delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)_0 \delta x_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0 \delta y'' + \text{[Члены высшего порядка малости]} = 0, \quad (4)$$

где F_0 - значение функции в установившемся режиме работы; $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0$-значение частной производной при переменных, соответствующих установившимся значениям.

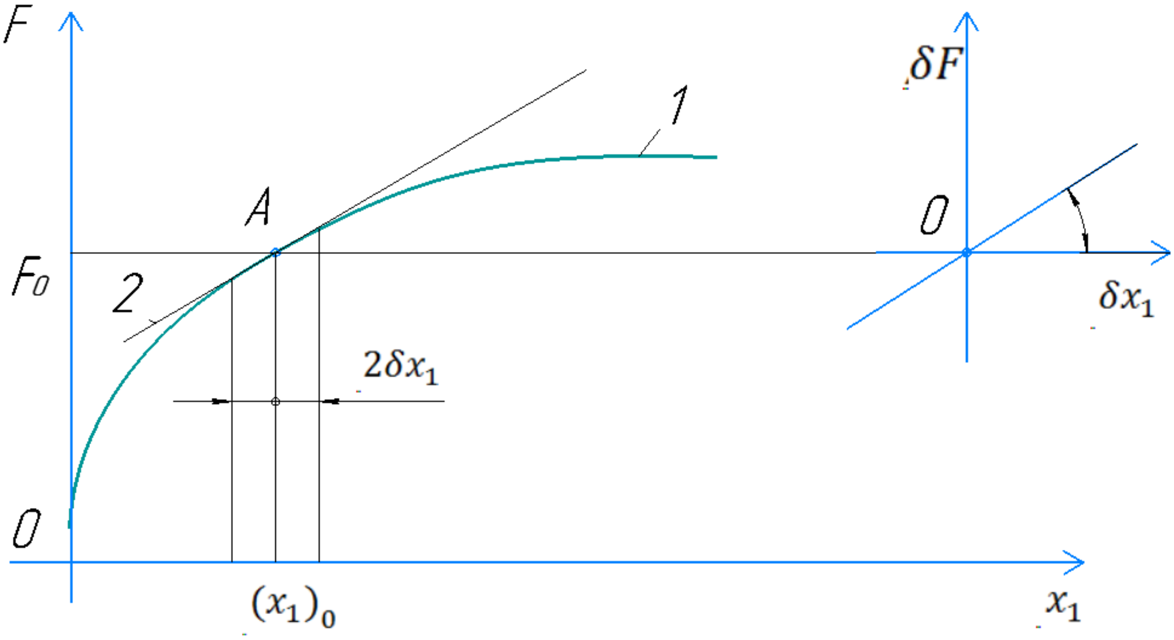

Рис. 2.2. Графическая иллюстрация метода линеаризации

Поскольку (2.4) описывает движение той же системы, что и исходное нелинейное уравнение (2.1), после вычитания значения функции Fo и пренебрежения членами высшего порядка малости, можно записать следующее уравнение, которое будет линейным:

$$\delta F \approx \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 \delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)_0 \delta x_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0 \delta y'' = 0.$$

Для графической иллюстрации изложенного способа линеаризации рассмотрим сечение поверхности, которая описывается функцией F по координате x при постоянных значениях других координат (рис. 2). След этой поверхности на координатной плоскости (F, x_1) показан линией 1. Точка $A\,[F(x_1)_0, F_0]$ соответствует установившемуся режиму работы системы или точке линеаризации. Заменим кривую касательной ней прямой 2. Вычитание из уравнения (4) значения функции F_0 равнозначно переносу начала координат в точку A. Уравнение прямой 2 в новой системе координат имеет вид: $\delta F = \delta x_1 tg\alpha$. Учитывая, что $tg\alpha = (\delta F/\partial x_1)_0$, окончательно получаем $\delta F = (\delta F/\partial\,(x_1)_0\,\delta\,x_1$. Аналогично можно проиллюстрировать линеаризацию и по другим управляемым входным координатам.

Список литературы:

1.Адаптивное управление станками / под ред. Б.С. Балакшина. М.: Машиностроение, 1973. 688 с.
2.Теория автоматического управления / под ред. Ю.М. Соломенцева. М.:Высшая школа, 2000. 268 с.
3.Naslin Pierre. Technologie et calcul pratique des systemes asservis. Paris: DUNOD, 1986. 496 p.

4.Milsant F.
Asservissements lineires: 2 volumes. Paris: DUNDO, 1984.